SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

DIRECCIÓN GENERAL ACADÉMICA

REFORMA CURRICULAR

BACHILLERATO GENERAL ESTATAL

PLAN DE ESTUDIOS 2006

COMPONENTE DE FORMACIÓN PROPEDÉUTICA

CÁLCULO INTEGRAL

Programa de estudio de 5° semestre

LUIS MALDONADO VENEGAS
Secretario de Educación Pública del Estado de Puebla

JORGE B. CRUZ BERMÚDEZ
Subsecretario de Educación Media Superior

JOSÉ LUIS BALMASEDA BECERRA
Director General Académico

GISELA DUEÑAS FERNÁNDEZ, MARÍA EDITH BÁEZ REYES, BEATRIZ PIMENTEL LÓPEZ, SARAHÍ GAXIOLA JARQUÍN, OSVALDO CUAUTLE REYES, MARÍA DE LOS ÁNGELES ALEJANDRA BADILLO MÁRQUEZ, LUIS RENATO LEÓN GARCÍA, MARCOS JARA MARTINEZ, EMILIO MIGUEL SOTO GARCÍA, MARÍA ISABLE REYES OSORIO.
Coordinación del Proyecto: Colegiado Académico

PROGRAMA DE ESTUDIOS
Cálculo Integral

Equipo de Diseño Curricular

María Angélica Álvarez Ramos, David Aquino Ponce, Ana María Castillo Juárez, Vivaldo Cuesta Sánchez, Miguel Ángel Espidio Juárez, Margarita Hernández González, Sotero Martínez Juárez, José Martin Mejía Hernández, Daniel Ozuna Rosas, Alma Patricia Ramírez Trinidad, Gilberto Santiago del Ángel, Paul Teutli Etcheverry

Revisión Metodológica

María Angélica Álvarez Ramos, Gerardo Ángel Chilaca, Verónica Ángel Chilaca, Faustino Javier Cortés López, Margarita Concepción Flores Wong, Jorge Fernando Flores Serrano, Juan Manuel García Zárate, Genaro Juárez Balderas, Sotero Martínez Juárez, María Teresa Notario González, Irma Ivonne Ruiz Jiménez, Juan Jesús Vargas Figueroa, Emilia Vázquez Pacheco

Estilo

Leonardo Mauricio Ávila Vázquez, Alejandro Enrique Ortiz Méndez, Cristina Herrera Osorio, Concepción Torres Rojas, Rafael Carrasco Pedraza

Formato

Osvaldo Cuautle Reyes, Liliana Sánchez Tobón, Emilio Miguel Soto García.

PROGRAMA ACADÉMICO:	CÁLCULO INTEGRAL
SEMESTRE:	QUINTO
CAMPO DISCIPLINAR:	MATEMÁTICAS
COMPONENTE DE FORMACIÓN:	PROPEDÉUTICO
NÚMERO DE HORAS:	3
CRÉDITOS:	6

IMPORTANCIA DEL CURSO

El Cálculo Integral es una rama de las matemáticas que fue aplicado por primera vez por científicos como Arquímedes, Descartes, Barrow y Newton. Éste último, junto con Leibriz crearon las bases para el Cálculo integral y diferencial, el Teorema Fundamental propone que la derivación y la integración son procesos inversos.

Este programa es parte del área disciplinar de matemáticas, da continuidad a los temas abordados en cursos anteriores de Algebra en relación a Teoría de conjuntos y expresiones algebraicas, Geometría y Trigonometría sustentándose en polígonos, funciones trigonométricas, con Geometría Analítica y Funciones en los temas de sistema de coordenadas cartesianas, línea recta, circunferencia, cónicas y relaciones biunívocas, Cálculo en los temas de Límites, Continuidad y Derivadas; todo ello conforma, al mismo tiempo, la base fundamental de la asignatura subsecuente de Modelos Matemáticos.

El cálculo integral es prácticamente la última fase en donde se ven reflejadas todos los conocimientos, destrezas y habilidades que el alumno haya desarrollado por su transcurrir en las materias antecesoras del campo de las matemáticas. Interdisciplinariamente contribuye al desarrollo de las asignaturas del semestre en curso de la siguiente manera a Biología II, en los temas de reproducción celular, desarrollo poblacional de microorganismos e incluso en el análisis de la propagación de enfermedades, al permitirle expresar matemáticamente el comportamiento observado; con Orientación Profesiográfica va a establecer relación al manejar con facilidad información, analizarla, reflexionarla, valorarla y desarrollar así competencias que le permitirán definir su futuro.

Debido a la gran diversidad de áreas a que está orientada esta asignatura influye sustancialmente en el proceso de estudio de las asignaturas de la formación propedéutica y para el trabajo mediante el enfoque generador de procesos, control de producción en volúmenes de revolución en el área de optimización.

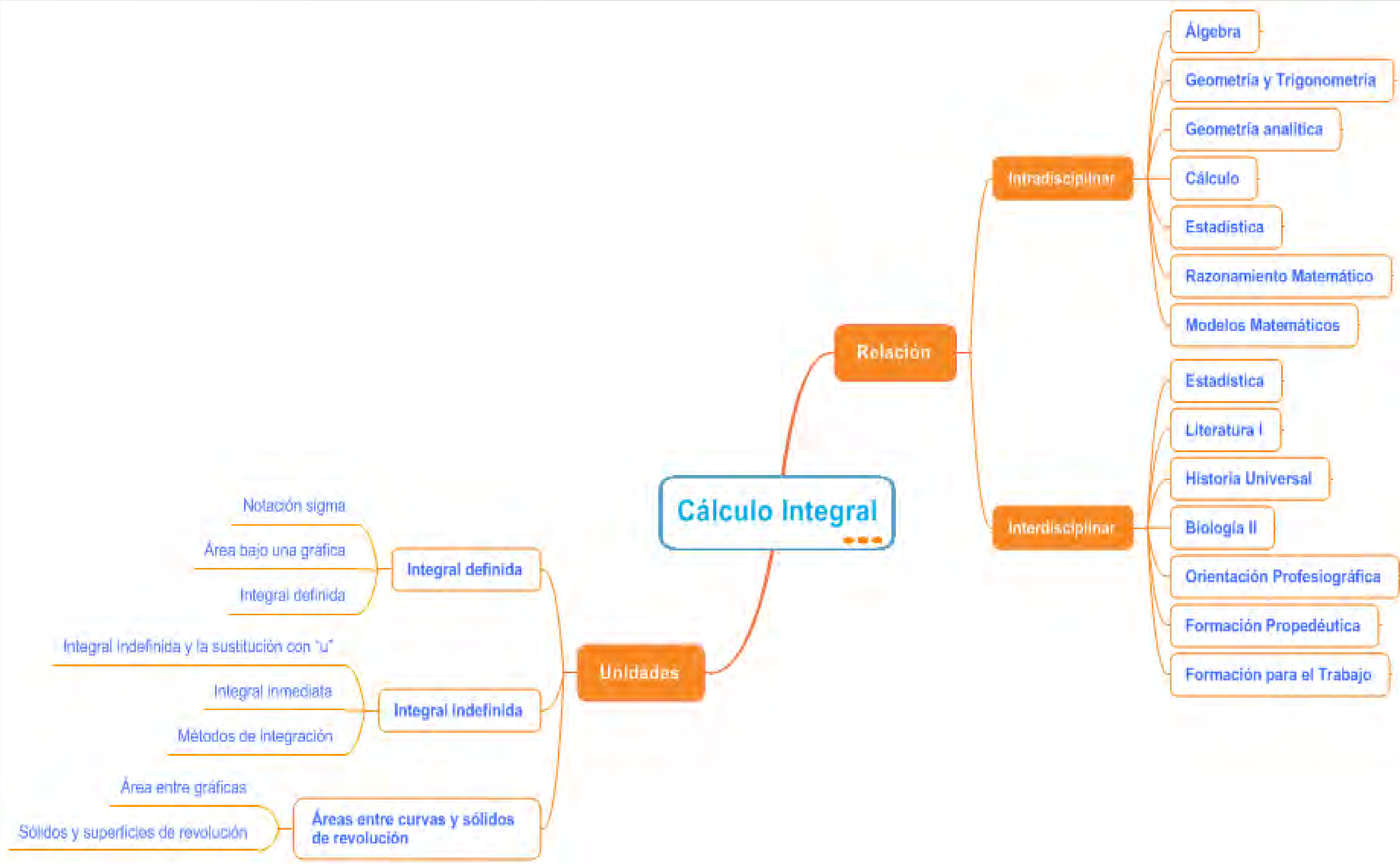
También se relaciona con otras materias como: Aplicaciones Informáticas apoyándose de las TIC's en la búsqueda de información así como software graficador; con Física II en la interpretación de las ecuaciones de continuidad (flujo, gasto, volumen, etc.).

El contenido del programa de Cálculo Integral está estructurado en las siguientes unidades:

Unidad I: Integral definida
Se abordan elementos básicos de cálculo integral como Notación sigma, Área bajo una gráfica e integral definida.

Unidad II: Integral indefinida
Se estudia la integral indefinida con “u”, Integral inmediata y los Métodos de integración.

Unidad III: Área entre curvas y sólidos de revolución
Se abordan las técnicas para calcular el área entre gráficas así como sólidos y superficies de revolución.



Cálculo Integral
Relación
Intradisciplinar
Álgebra
Geometría y Trigonometría
Geometría analítica
Cálculo
Estadística
Razonamiento Matemático
Modelos Matemáticos
Interdisciplinar
Estadística
Literatura I
Historia Universal
Biología II
Orientación Profesiográfica
Formación Propedéutica
Formación para el Trabajo
Unidades
Integral definida
Notación sigma
Área bajo una gráfica
Integral definida
Integral Indefinida
Integral indefinida y la sustitución con "u"
Integral inmediata
Métodos de integración
Áreas entre curvas y sólidos de revolución
Área entre gráficas
Sólidos y superficies de revolución

COMPETENCIAS

El presente programa contribuye particularmente al desarrollo de las siguientes competencias:

GENÉRICAS

Escucha interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o graficas.
- Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

- Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia confiabilidad.
- Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

- Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.
- Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

- Propone manera de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuentan dentro de distintos equipos de trabajo.

DISCIPLINARES EXTENDIDAS

- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

RESULTADOS DE APRENDIZAJE DEL CURSO

Los alumnos:

En el nivel Atender:

- Identificarán el área bajo una función y volumen de un sólido de revolución.
- Identificarán los distintos tipos de integrales.

En el nivel Entender:

- Comprenderán la aproximación de áreas bajo una curva por medio del teorema fundamental del cálculo.
- Entenderán los métodos de integración por sustitución y por partes.
- Comprenderán la forma de calcular el área entre funciones y el volumen de un sólido de revolución.

En el nivel Juzgar:

- Demostrarán el comportamiento de distintos fenómenos a través del cálculo de integrales indefinidas.

En el nivel Valorar:

- Utilizarán el Cálculo Integral en la solución de problemas de su entorno.

UNIDAD I. INTEGRAL DEFINIDA

Resultados de aprendizaje

En el nivel Atender, el alumno:

- Identificará áreas bajo curvas.

En el nivel Entender, el alumno:

- Conocerá el concepto de integral definida.
- Conocerá la notación sigma.

En el nivel Juzgar, el alumno:

- Verificará las propiedades de la integral definida.
- Comprobará el cálculo de áreas, apoyándose de la notación sigma.
- Comprenderá los métodos de aproximación de áreas.

En el nivel Valorar, el alumno:

- Resolverá problemas utilizando la notación sigma.
- Determinará la importancia del concepto de límite en la definición de integral definida.

Horizonte de Búsqueda	Niveles de Operación de la Actividad Consciente Intencional Preguntas			Actividades específicas de aprendizaje Que el alumno:
	Para la inteligencia	**Para la reflexión**	**Para la deliberación**	
NOTACIÓN SIGMA	¿Cómo se define la notación sigma? ¿Qué propiedades tiene la notación sigma?	¿Cómo se comprueban las propiedades de la notación sigma?	¿Para qué sirve la notación sigma?	Encuentre en equipo la suma de los primeros 20 números naturales, anote en su libreta, después encuentre una expresión algebraica que le permita realizar esa suma evitando muchas operaciones, coméntelo con los otros equipos argumentando su respuesta. Busque en distintas fuentes bibliográficas, información acerca de la notación, propiedades y formulas de sumatoria, presente la información como formulario. Socialice con el grupo su formulario, intercambiando puntos de vista, y corrija, de ser necesario, su formulario. Demuestre las propiedades de la notación sigma, utilizando el formulario en la resolución de los siguientes problemas: a) Desarrolle las sumatorias indicadas: 1. $\sum_{k=1}^{5} 3k$

2. $\sum_{k=1}^{4} \frac{3^k}{k}$

3. $\sum_{k=1}^{8} (2k-3)$

b) Encuentre la notación sigma de la suma de los 10 primeros números pares positivos.
c) Encuentre la notación sigma de la suma de los 10 primeros números impares positivos.
d) 2+4+8+16+32+64
e) Obtenga el valor de la suma correspondiente:

1. $\sum_{k=1}^{50} (-3k)$

2. $\sum_{k=1}^{8} (k^2+3)$

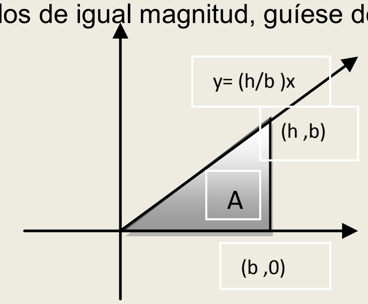
3. $\sum_{k=1}^{1o} (2k^3-3k+3)$

f) Una carreta es arrastrada hacia el norte por tres caballos por medio de cuerdas, el primer caballo jala la carreta con una fuerza de 40 N, el segundo caballo arrastra con una fuerza de 30 N, el tercer caballo jala con una fuerza de 50 N, si el ángulo que separa la cuerda del caballo 1 y 2 es de 30^0, el ángulo que separa la cuerda del caballo 2 y 3 es de 40^0, determine la fuerza total con la que es arrastrado le carreta.

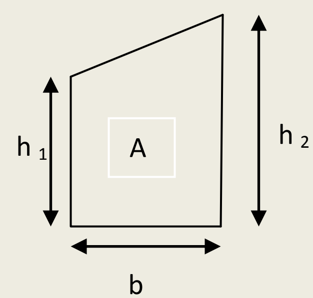
Deduzca en equipo una fórmula para la sumatoria de los *n* primeros enteros pares positivos, preséntela al resto de los equipos y comente que es la misma expresión.
Comente y concluya en grupo, la aplicación y utilidad de la notación sigma en diversas áreas de conocimiento y en la cotidianidad para reducir la operación de gran

				número de términos o elementos.
ÁREA BAJO UNA GRÁFICA	¿Cuál es el área bajo una gráfica?	¿Cómo se determina el área bajo una gráfica?	¿Cómo puede utilizarse el cálculo de áreas de figuras geométricas conocidas para determinar áreas irregulares?	Grafique la función $f(x)=x$ para [0,3], encuentre el área formando un número de rectángulos inscritos o circunscritos que considere necesario bajo la gráfica limitada por f(x), el eje horizontal *x y* el intervalo indicado, comente con sus compañeros si fue posible determinar el área solicitada. Averigüe, en distintas fuentes acerca del área bajo la gráfica por método de aproximación, procedimiento para determinar el área bajo la gráfica y sumas de Riemann. Registre su información en un cuadro sinóptico. Socialice el cuadro con el grupo y enriquezca con las aportaciones de sus compañeros. Utilizando la información del cuadro sinóptico, encuentre el área bajo la gráfica de la función indicada por método de aproximación. 1. $f(x)=x+2 \quad para \quad [0,4]$ 2. $f(x)=x^2 \quad para \quad [0,2]$ 3. $f(x)=4-x^2 \quad para \quad [-2,2]$ 4. $f(x)=2x^2+3 \quad para \quad [-3,-1]$ 5. $f(x)=x^3 \quad para \quad [0,2]$ Encuentre, utilizando la información del cuadro sinóptico, el área bajo la gráfica de la función indicada por sumas de Rieman: 1. $f(x)=x^2-4 \quad para \quad [-2,3]$ empleando una partición de 5 subintervalos de igual longitud. 2. $f(x)=2x^2-1 \quad para \quad [-1,2]$ empleando una partición de 3 subintervalos de igual longitud. 3. $f(x)=(x-1)^2 \quad para \quad [-2,2]$ empleando una partición de 6 subintervalos de igual longitud. 4. $f(x)=x^3-2 \quad para \quad [-1,2]$ empleando una partición de 4 subintervalos de igual longitud.

Encuentre la expresión para calcular el área bajo la gráfica de $y = \frac{h}{b}x \quad para \quad [0, b]$, divida en n subintervalos de igual magnitud, guíese de la figura:



Deduzca en equipo la expresión (la formula) para determinar el área de un trapecio dividiendo en n subintervalos de igual magnitud, guíese de la figura:



Presente al grupo el procedimiento que utilizó para determinar el área de la figura anterior. A partir de ello comente, de manera grupal, la importancia de emplear el método de aproximación para calcular áreas de cualquier tipo.

INTEGRAL DEFINIDA	¿Cómo se define la integral definida? ¿Qué propiedades tiene la integral definida?	¿Cómo se comprueban las propiedades de la integral definida?	¿En qué situaciones cotidianas se puede aplicar la integral definida?	Desarrolle la expresión $(x+3)^2$ y anótelo en su libreta, después factorice la expresión x^2+6x+9, comente en equipo la relación que existe entre los dos procesos que realizó en ambas operaciones. Encuentre la derivada de la función $f(x)=x^2$ y anótela, de la misma manera que en la actividad anterior, encuentre en equipo un procedimiento para regresar la derivada obtenida a la expresión original, y determine el área bajo la gráfica de f(x) para [0,1] con 1000 rectángulos de igual base utilizando la notación sigma, comente con los demás equipos sobre las operaciones realizadas y si fue posible encontrar el procedimiento solicitado. Indague en distintas fuentes sobre el concepto de integral, integral de una potencia, integral definida, propiedades y teoremas de la integral definida, el teorema fundamental del cálculo, registre su información en un mapa conceptual. Exponga, en equipo, su mapa conceptual, intercambiando puntos de vista para corregir errores y complementar su información. Compruebe las propiedades investigadas en el desarrollo de los siguientes ejercicios: a) Evalué la integral definida con notación sigma y realice la gráfica de: 1. $\int_1^3 x^2dx$ 2. $\int_{-2}^1 x^3dx$ 3. $\int_1^2 (x^2-x)dx$ b) Evalúe con propiedades, teoremas de la integral definida y el teorema fundamental del cálculo, realice la gráfica de:

				1. $\int_{1}^{4} 5dx$ 2. $\int_{2}^{51} xdx$ 3. $\int_{-2}^{1} x^3 dx$ 4. $\int_{-2}^{31} 2x^2 dx$ 5. $\int_{-1}^{2} (x^2-2)dx$ Comente en equipo la importancia de los teoremas y propiedades de la integral definida para determinar áreas exactas bajo la gráficas de funciones, observe si: $\int_{-1}^{1} x^{-2}dx = -x^{-1}\Big\|_{-1}^{1} = -1+(-1) = 2$, con el apoyo del teorema fundamental del cálculo, proponga un argumento de por qué el procedimiento anterior es correcto o incorrecto. Concluya a partir de ello la utilidad de conocer y emplear las propiedades y los teoremas de la integral definida para determinar áreas exactas bajo la gráfica de cualquier función en donde no se pueden aplicar las fórmulas de figuras geométricas conocidas.

EVALUACIÓN

CONOCIMIENTOS	PROCESOS Y PRODUCTOS	DESEMPEÑO ACTITUDINAL CONSCIENTE
El alumno demuestre la apropiación de lo siguiente:	El alumno evidencie los procesos y la obtención de los siguientes productos:	El alumno manifieste los siguientes valores y actitudes:
• Notación sigma. • Área bajo una gráfica. • Integral definida.	• Cálculo de sumatoria de primeros 20 números. • Formulario de sumatoria. • Cálculo de sumatorias. • Fórmula de sumatoria de n primeros números pares positivos. • Gráfica de la función f(X) = X. • Cuadro sinóptico de área y sumas de Riemman. • Cálculo de Área bajo la gráfica de una función. • Fórmula para determinar el área de un trapecio. • Desarrollo de la expresión $(x+3)^2$ y factorización de $x^2 + 6x + 9$. • Derivada de $f(x)=x^2$, y cálculo de área bajo la gráfica. • Mapa conceptual de integral definida. • Cálculo de integrales definidas.	• Respeto. • Tolerancia. • Colaboración. • Responsabilidad. • Puntualidad en la entrega de trabajos y proyectos. • Participación. • Disposición ante el trabajo de equipo.

UNIDAD II. INTEGRAL INDEFINIDA

Resultados de aprendizaje

En el nivel Atender, el alumno:
- Identificará antiderivadas.

En el nivel Entender, el alumno:
- Conceptualizará la integral indefinida.
- Comprenderá los métodos de integración por sustitución y por partes.

En el nivel Juzgar, el alumno:
- Deducirá integrales elementales.
- Aplicará los métodos de integración por sustitución y por partes.

En el nivel Valorar, el alumno:
- Aplicará diversos métodos para resolver integrales.

Horizonte de Búsqueda	Niveles de Operación de la Actividad Consciente Intencional Preguntas			Actividades específicas de aprendizaje Que el alumno:
	Para la inteligencia	**Para la reflexión**	**Para la deliberación**	
INTEGRAL INDEFINIDA Y LA SUSTITUCIÓN CON "u"	¿Cómo se define la integral indefinida?	¿Cómo se calcula la integral indefinida?	¿Qué problemas se pueden resolver utilizando la integral indefinida?	En equipo, observe y evalúe la integral $\int_0^b (x^2)dx$ anote el resultado. Evalúe las integrales $\int (2x^3 - x^2 + 2x - 1)dx$, $\int (x^2 - 1)^2 dx$ anote el procedimiento y el resultado, si lo obtuvo, comente si la información proporcionada es suficiente para la solución y escriba las interrogantes que surjan. En equipo, busque en distintas fuentes los siguientes conceptos: integral indefinida, potencia, suma y diferencia, sustitución con "u". Elabore un cuadro sinóptico. Presente su cuadro sinóptico y complemente con las aportaciones de sus compañeros. Utilizando la información de la actividad anterior resuelva los siguientes ejercicios: 1. $\int x^6 dx$ 2. $\int \sqrt{x} dx$

3. $\int (x+2)(x-2)dx$
4. $\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}dx$
5. $\int (x^2+2)^3 x dx$
6. $\int \sqrt[3]{(7-2x^3)^4}\, x^2 dx$
7. Obtenga una función *f* cuya gráfica pase por el punto (2,3) y que también satisfaga $f'(x) = 2x-1$
8. Obtenga una función *f* de manera que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ y $f(9) = 1$
9. Una cubeta que contiene un líquido, gira alrededor de un eje vertical a una velocidad angular constante ω. El contorno en el plano *xy* de la sección transversal del líquido en rotación se determina a partir de $\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g}x$. Encuentre y=f(x),

En equipo considere que si P(x) es una función que denota el crecimiento de una población en *x* meses, entonces: $\frac{d}{dx}P(x)$ es la razón a la cual estará cambiando la población en *x* meses. La razón a la cual está creciendo una población, cambia con el tiempo. Se calcula que dentro de *x* meses, la razón de crecimiento será: $2+6\sqrt{x}$ Personas por mes. La población actual es de 5000 personas, comprueba que la población dentro de 9 de meses será de 5126 personas.
Comente grupalmente la importancia de utilizar la integral indefinida para obtener la función original y concluya su utilidad como herramienta de aplicación en problemas diversos, por ejemplo el crecimiento

				poblacional. Elabore una ficha de síntesis
INTEGRAL INMEDIATA	¿Cuáles son las integrales inmediatas?	¿Cómo se deducen las integrales inmediatas?	¿Qué utilidad tienen las integrales inmediatas?	Encuentre en bina utilizando la integral indefinida y la sustitución con “u” los siguientes integrales: 1. $\int \cos^2 x\, sen\, dx$ 2. $\int \frac{dx}{x-7}$ 3. $\int \tan x\, dx$ 4. $\int 3e^{3x} dx$ 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{100-x^2}}$ Comente con el resto del grupo el procedimiento que utilizó para encontrar los resultados de cada integral, anote lo que considere relevante en su libreta de apuntes. Indague en distintas fuentes sobre las fórmulas integrales de funciones trigonométricas, trigonométricas inversa, logarítmicas y exponenciales. Registre la información en una tabla, a manera de formulario. Explique al grupo la información de su formulario, corrigiendo y complementándolo, argumente cada una de sus aportaciones. Con base en la información anterior, deduzca el valor de las siguientes integrales: 1. $\int \sec^2(1-4x)dx$ 2. $\int \cos^4 x\, senx dx$ 3. $\int \frac{sen 2\theta}{\cos\theta} d\theta$

4. $\int tagx \sec^2 x dx$

5. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$

7. $\int \frac{dx}{x-7}$

8. $\int \frac{e^{4x}}{x^2} dx$

9. Calcule el área A limitada por la gráfica de la $y = \frac{1}{x}$ y el eje x en el intervalo [-2,-1/2]

10. Obtenga el área A limitada por la gráfica de $y = e^{x-1}$ en el intervalo [1,3]

11. Determine el área bajo la gráfica de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en el intervalo [-1,1]

Resuelva en equipo la integral $\int (senx + 8\sec^2 x) dx$, comente con el grupo la importancia de la integral inmediata por facilitar conduciendo a la obtención de integrales de funciones trascendentes de manera directa, realice una ficha de conclusión de que se utilizan para integrar y facilitan la obtención de áreas bajo la gráfica de este tipo de funciones.

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN Integración por sustitución algebraica, por partes y sustitución trigonométrica	¿Qué es un método de integración? ¿Cuáles son los métodos de integración?	¿Cómo se utilizan los métodos de integración de integración?	¿En qué situaciones se aplican los métodos de integración?	Encuentre, en equipo, las siguientes integrales: a) $\int x^2 \cos x dx$ b) $\int x^2 \sqrt{x+1} dx$ c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$ Presente los resultados obtenidos al grupo, explicando el procedimiento que siguieron. En equipo indague en distintas fuentes los métodos de integración por sustitución algebraica, integración por partes y la integración por sustitución trigonométrica. Registre la información en una tabla a manera de formulario. Presente el formulario al grupo y en una discusión (con respeto y tolerancia) corrija y complemente su tabla, argumente cada una de sus aportaciones. Utilizando los métodos investigados, resuelva los siguientes ejercicios: 1. Integrales por sustitución algebraica: a) $\int x^2 \sqrt{x+1} dx$ b) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ c) $\int \frac{x-4}{x^2+6x+18} dx$ 2. Integración por partes: d) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

e) $\int x tag^{-1} x dx$

f) $\int \sec^3 x dx$

3. Integrales por sustitución trigonométrica:

g) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx$

h) $\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}} dx$

i) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4} dx$

4. Evalúe las integrales

j) $\int_0^2 \frac{6x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}$

k) $\int_0^1 (x^2-x)e^{-x} dx$

5. Obtenga el área bajo de la gráfica de $y = \frac{1}{(x^{1/3}+1)} dx$ en el intervalo [0,1]

6. Encuentre en equipo el área bajo la gráfica de $y = \ln x$ en el intervalo [1, e].

Comente la manera en que los métodos de integración facilitan la obtención de integrales no inmediatas y el área bajo las gráficas de funciones compuestas.
Resuelva grupalmente el siguiente problema: Se desea dar mantenimiento a un muro de su aula de clases, para lo cual es necesario pintar un área determinada por las

				funciones $y = 3x + 6$; $y = -2x + 4$ para el intervalo [0, 4] y el eje x representado por la cadena del muro. Determine la cantidad de pintura necesaria para pintar dicho muro sabiendo que el rendimiento de la pintura es de $3\frac{m^2}{lt}$. Elabore una ficha de comentario acerca de la aplicación de los métodos de integración a la vida diaria.

EVALUACIÓN

CONOCIMIENTOS	PROCESOS Y PRODUCTOS	DESEMPEÑO ACTITUDINAL CONSCIENTE
El alumno demuestre la apropiación de lo siguiente:	El alumno evidencie los procesos y la obtención de los siguientes productos:	El alumno manifieste los siguientes valores y actitudes:
• Integral Indefinida y la sustitución con "u". • Integrales inmediatas. • Método de Integración por sustituciones algebraicas. • Método de Integración por partes. • Método de Integración por sustituciones trigonométricas.	• Cálculo de integrales. • Cuadro sinóptico de integral definida. • Cálculo de integrales indefinidas. • Problema de aplicación de integral indefinida. • Ficha de síntesis de integral indefinida. • Formulario de integrales de funciones trigonométricas. • Cálculo de integrales trigonométricas. • Ficha conclusión de integrales inmediatas. • Formulario de métodos de integración. • Solución de integrales por sustitución. • Cálculo de área bajo la gráfica y solución a problema de aplicación. • Ficha comentario de métodos de integración.	• Respeto. • Tolerancia. • Colaboración. • Responsabilidad. • Puntualidad en la entrega de trabajos y proyectos. • Participación. • Disposición ante el trabajo de equipo

UNIDAD III.	ÁREA ENTRE CURVAS Y SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Resultados de aprendizaje

En el nivel Atender, el alumno:

- Identificará el área comprendida entre curvas y sólidos de revolución.

En el nivel Entender, el alumno:

- Comprenderá los métodos para calcular el área formada entre curvas y el volumen de un sólido de revolución.

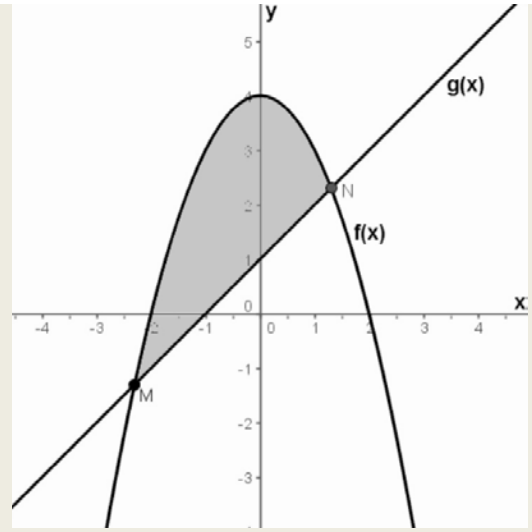
En el nivel Juzgar, el alumno:

- Deducirá que el cálculo de área entre curvas y el volumen de un sólido de revolución se realiza a través de una integral.
- Aplicará los métodos de integración para el cálculo de área entre curvas y el volumen de un sólido de revolución.

En el nivel Valorar, el alumno:

- Determinará la importancia del Teorema Fundamental en el cálculo de área entre curvas y el volumen de un sólido de revolución.
- calculará área entre curvas y volumen de un sólido de revolución, para la solución de problemas de su entorno.

Horizonte de Búsqueda	Niveles de Operación de la Actividad Consciente Intencional Preguntas			Actividades específicas de aprendizaje Que el alumno:
	Para la inteligencia	**Para la reflexión**	**Para la deliberación**	
ÁREA ENTRE GRÁFICAS	¿Qué es el área entre gráficas?	¿Cómo se determina el área entre gráficas?	¿Qué utilidad tiene calcular el área entre gráficas en problemas cotidianos?	En equipo determine el área limitada por los puntos de intersección de las funciones $f(x)=-x^2+4$ y $g(x)=x+1$ y utilizando los métodos de integración necesarios, muestre que el área a calcular es la siguiente:

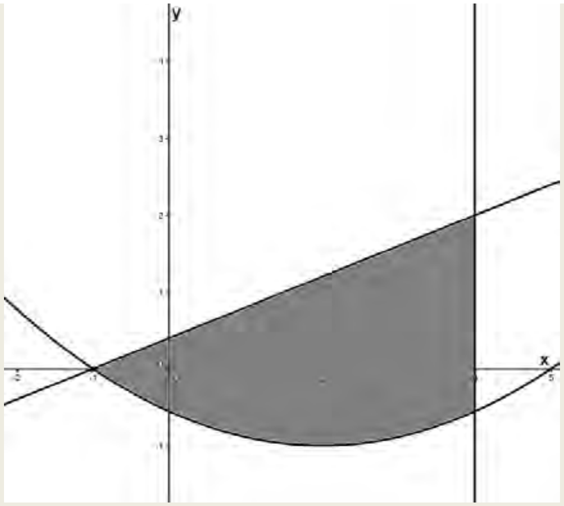


Presente al grupo el resultado y el procedimiento que utilizó para determinar el área solicitada, comente al respecto y anote lo más relevante.

Busque en distintas fuentes de información o en la web acerca del cálculo de áreas entre dos gráficos. En binas, registre su información mediante una tabla a manera de formulario, lo socialice, corrija y complemente su tabla con los comentarios acertados de los demás compañeros.

Resuelva, apoyándose del formulario, los siguientes problemas:

a) Obtenga el área de la región limita por las gráficas de las ecuaciones $y=\frac{(x-2)^2}{9}-1$, $y=\frac{2}{5}x+\frac{2}{5}$ y $x=4$, demuestre que el área que se desea encontrar se muestra en la figura siguiente:



b) Calcula el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1$, $g(x)=-x+5$ y $h(x)=\frac{1}{3}x+1$.

c) Determine el área de la región limitada por las gráficas de $y=x^2+2x$ y $y=-x+4$ en el intervalo [-4,3]

d) Determine el área de la región limitada por las gráficas de $y=\sqrt{x}$ y $y=x^2$

e) Obtenga el área de la región limitada por las graficas de $y=senx$ y $y=\cos x$ para el intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$

En equipo, considere: Papá desea calcular el área de

				vidrio que va a utilizar para construir una ventana ornamentada que se encuentra limita por las gráficas de la función $y=-x^2+9$, y 2 rectas que pasan por el origen con pendientes $m_1=5/2$ y $m_2=-5/2$, comente con el resto del grupo, la importancia de saber calcular áreas entre las gráficas de funciones, realizando una síntesis acerca de la trascendencia de utilizar este tipo de cálculos en problemas cotidianos.
SÓLIDOS Y SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN	¿Qué es un sólido y una superficie de revolución?	¿Cómo se obtiene el volumen de un sólido y una superficie de revolución?	¿Qué utilidad tiene obtener el volumen y la superficie de un sólido de revolución en problemas cotidianos?	En equipo grafique la función $y=x+1$ para el intervalo [0, 4], encuentre el área formada bajo la gráfica. Realice a manera de maqueta (prototipo) la gráfica de la función de tal manera que se pueda girar sobre el eje x. Calcule el volumen de la figura geométrica que se forma. Presente su prototipo al resto del grupo mostrando la figura geométrica que se forma y el procedimiento que utilizó para encontrar el volumen del mismo. Indague en distintas fuentes, sobre sólidos de revolución: método de los discos y las arandelas (o rodajas), método de los envolventes (o cortezas), superficies de revolución y registre su información en una tabla a manera de formulario. Lo socialice, complemente y corrija de acuerdo a los comentarios de sus compañeros, argumente sus comentarios. Resuelva en equipo con apoyo del formulario de la actividad anterior, los siguientes problemas: a) Encuentre el volumen del cuerpo geométrico que se forma haciendo girar la región limitada por las gráficas de $y=x+2,\ y=x,\ x=0,\ x=3$ en torno al eje x, por el método de los discos o las arandelas. b) Encuentre el volumen del sólido que se forma haciendo girar la región limitada por las gráficas de $x=y^2-2y$ y x= 3, en torno a la recta y= 1, con el método de los envolventes. c) Encuentre el área S de la superficie formada

				haciendo girar $y = 3x^{\frac{1}{3}}$ en el intervalo [1, 8] en torno al eje y. En equipo, considere: *La prima Edith desea forrar con una tela muy cara 10 maceteros que le regalaron unos amigos que fueron a Tabasco, el área a forrar de cada macetero está definido por $y = \sqrt{x}$ en el intervalo [1,4] haciéndolo girar en base al eje x, encuentre el área total de tela que ella debe de comprar para realizar esta actividad.* A partir de ello comente con el grupo el valor de conocer los métodos para encontrar áreas y volúmenes de sólidos de revolución como cuerpos generados por el giro de figuras geométricas que no pueden ser determinadas por fórmulas de la geometría plana, analice la utilidad de los métodos empleados para obtener áreas-volúmenes de revolución y realice una ficha de síntesis de acuerdo a las aportaciones de sus compañeros.

EVALUACIÓN

CONOCIMIENTOS	PROCESOS Y PRODUCTOS	DESEMPEÑO ACTITUDINAL CONSCIENTE
El alumno demuestre la apropiación de lo siguiente:	El alumno evidencie los procesos y la obtención de los siguientes productos:	El alumno manifieste los siguientes valores y actitudes:
• Área entre gráficos. • Sólidos y superficies de revolución.	• Obtención del área entre gráficas. • Formulario de cálculo de áreas entre dos gráficas. • Cálculo de áreas entre dos gráficas. • Solución a problema de aplicación. • Síntesis de áreas entre dos gráficas • Gráfica, maqueta, cálculo de área y volumen de la función y = x + 1. • Formulario de sólidos de revolución. • Cálculo de volúmenes de distintos sólidos de revolución. • Realización o interpretación de gráficos • Libreta de apuntes. • Ficha de síntesis de áreas y volúmenes de sólidos de revolución.	• Respeto. • Tolerancia. • Colaboración. • Responsabilidad. • Puntualidad en la entrega de trabajos y proyectos. • Participación. • Disposición ante el trabajo de equipo.

METODOLOGÍA

Si consideramos al método como: *El conjunto de operaciones recurrentes e interrelacionadas que producen resultados acumulativos y progresivos*, se plantea, desde una perspectiva humanista, una metodología que dirija la práctica docente en los cuatro niveles de consciencia del Método Trascendental a la activación de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Para lograr esa activación, el profesor debe conducir en todo momento el aprendizaje hacia la autoapropiación del proceso por medio de la actividad consciente del alumno. El papel conductor del maestro consiste en la selección y ordenamiento correcto de los contenidos de enseñanza, en la aplicación de métodos apropiados, en la adecuada organización e implementación de las actividades, y en la evaluación sistemática durante los procesos de enseñanza y aprendizaje. Precisamente por eso, la metodología más que exponer y sistematizar métodos, se esfuerza en proporcionar al profesor los criterios que le permiten justificar y construir el método que responda a las expectativas educativas que cada situación didáctica le plantea.

En los programas, la metodología debe adecuarse a los cuatro niveles de conciencia del Método Trascendental:
Atenta. Que promueva la recuperación de datos conocimientos previos.
Inteligente. Que promueva la generación y manejo de datos y conceptos.
Crítica. Que promueva la generación de juicios de hechos y la participación crítica y reflexiva.
Libre-responsable. Que promueva la generación de juicios de valor, toma de decisiones.

Criterios generales para convertir la práctica docente en:	
Atenta	**El docente:** • Identifica el contexto social en que está inmersa la comunidad educativa. • Considera el horizonte actual de cada alumno: (conocimiento, contexto, habilidades, etc.) • Observa la diversidad cultural de los alumnos. • Detecta las necesidades educativas de la comunidad y de los actores que forman parte de ella. • Revisa los planes y programas de estudios. • Ubica el curso en relación con el plan de estudios, la organización de la institución (aspectos operativos), y las características y expectativas del grupo. • Reconoce las propias competencias.
Inteligente	**El docente:** • Propone los resultados de aprendizaje del curso con base en el análisis del entorno (horizonte global). • Planea cada sesión o secuencia didáctica (las actividades) para hacer eficiente el proceso educativo, fortaleciéndolas con investigación o consultas a diversas fuentes de información que le permiten afianzar el manejo de contenidos y facilitan las actividades del aula. • Diseña técnicas grupales que propician el trabajo colaborativo.

	• Motiva al alumno, a través de estrategias que logran despertar su interés. • Selecciona previamente los materiales (lecturas, copias u otros) para el trabajo de cada sesión. • Promueve la interdisciplinariedad. • Guía los procesos en forma contingente. • Entiende la función docente como guía, orientación, acompañamiento.
Crítica	**El docente:** • Establece relaciones interpersonales adecuadas, que estimulan la apropiación de conceptos, significados y valores. • Ejerce su papel de mediador, orientador, facilitador y guía. • Fortalece las habilidades, destrezas y actitudes de los estudiantes logrando su autonomía. • Analiza las situaciones que obstaculizan o impiden el logro de los objetivos. • Evalúa en forma continua los conocimientos procesos, productos y el desempeño actitudinal consciente (alumno_ docente) con instrumentos apropiados que le permiten tomar decisiones oportunas.
Libre - Responsable	**El docente:** • Autoevalúa periódicamente su práctica docente. • Delibera sobre los resultados del proceso educativo asumiendo su responsabilidad. • Se reconoce como sujeto de aprendizaje y propone innovaciones a los procesos de enseñanza y aprendizaje. • Valora la importancia de los procesos de enseñanza y aprendizaje como medios para favorecer el crecimiento y desarrollo del ser humano.

EVALUACIÓN

Como parte del proceso de aprendizaje, la evaluación se realiza antes de iniciar la implementación del programa de estudios. La Evaluación Diagnóstica tiene la finalidad de detectar las necesidades específicas de los estudiantes, de acuerdo al contexto y además, señala pautas para la adecuada planeación didáctica por parte del docente. El resultado de esta evaluación no se traduce en una calificación para el alumno, sino en fortalezas y oportunidades de aprendizaje, asimismo, se realiza al inicio de cada semestre de manera obligatoria.
En las secuencias didácticas que se presentan como modelo para cada horizonte de búsqueda, hay sugerencias implícitas o explicitas para realizar la Coevaluación y la Autoevaluación que permiten desarrollar las competencias de los estudiantes y al mismo tiempo, arrojan datos sobre la calidad y cantidad de los resultados de aprendizaje que se van alcanzando, es decir, se aplican los fundamentos de la Evaluación Formadora.
La heteroevaluación continua aporta información importante tanto para el docente como para el estudiante, permite la retroalimentación y por ello incide tanto en el proceso de enseñanza como en el de aprendizaje.

El Modelo de Evaluación para Bachillerato General Estatal (MOEVA) establece que la evaluación se realizará en tres ejes:

a) Conocimientos, que se refiere a la dominación y apropiación de hechos, definiciones, conceptos, principios, ideas, datos, situaciones, teorías, postulados.
b) Procesos y Productos, evalúa la calidad de los procesos en la autoconstrucción del aprendizaje, evidenciando los mismos en productos concretos.
c) Desempeño Actitudinal Consciente, evalúa las actividades racionales que realiza el estudiante de manera intencional en las que están presentes las actitudes que permiten la asunción de valores y la personalización de las normas hacia una progresiva y auténtica humanización del hombre.

Cada eje tiene precisados, como puede verse en cada columna del apartado de evaluación de cada unidad, los elementos que pueden evaluarse, para que de manera integral se dé lugar a la Evaluación Sumativa.

Instrumentos sugeridos:
Los siguientes instrumentos pueden utilizarse dependiendo del énfasis que pretenda darse a cada eje de evaluación. Para mayor referencia se recomienda acudir al Manual del MOEVA.

Conocimientos	Uno o varios de los siguientes instrumentos: Escala valorativa ordinal, Escalas valorativa numérica, Prueba objetiva, Exposición oral, Resolución de problemas, Mapa mental, Mapa conceptual, Lista de palabras, Tabla lógica.
Procesos y productos	Uno o varios de los siguientes instrumentos: V Heurística, Método de casos, Proyecto parcial de unidad, Diario de asignatura, Portafolios de productos, Lista de cotejo de productos, Reportes escritos, Cuadernos de trabajo, Periódicos murales, Rejillas de conceptos, Cuadros de doble entrada, Cuadros sinópticos, Fichas de trabajo (síntesis y/o resumen), Estudios de campo, Dibujos y/o collages.

Desempeño Actitudinal Consciente	Uno o varios de los siguientes instrumentos: Guía de observación, Entrevista dirigida semiestructurada, Encuestas, Registro acumulativo, Lista de control, Escala de Likert, Escala de Thurstone, Escala de producción, Rúbrica.

APOYOS DIDÁCTICOS COMPLEMENTARIOS

- Modelos matemáticos.
- Ejercicios y problemas.
- Calculadora y computadora.
- Pizarrón, gis o marcador.
- Proyectos de acetatos.
- Video proyector.
- Hojas blancas y de colores.
- Libro de Texto.

LISTA DE REFERENCIAS

Bibliografía Básica

- ZILL, D. G. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. México D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica
- LARSON, R. y HOSTETLER, R. (1995). *Cálculo*. (Primera Edición). Bogotá., Colombia: Mc Graw Hill
- SWOKOWSKI, E. W. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. (Segunda Edición). México D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- LEITHOLD, L. (1999). *El Cálculo*. (Séptima Edición). Estado de México, México: Oxford.
- STEWART, J. (1999). *Cálculo Diferencial e Integral*. México D. F., México: Internacional Thomson Editores.
- LEITHOLD, L. (2004). *Cálculo con Geometría Analítica,* (Séptima Edición). Estado de México, México: Editorial Harla.
- LEHMAN, M. (1986). *Lecciones de Cálculo I*, México D. F., México: Fondo Educativo Interamericano.
- BALABASQUER, G. (1994). *El concepto de derivada y sus aplicaciones*, Madrid, España: Torrejón de Ardoz.
- PURCELL, E. J. (2001). *Cálculo.* (Segunda Edición), México D. F., México: Pearson Educación.
- STEWART, J. y RAMOS, J. (2006). *Cálculo Conceptos y Contextos.* (Tercera Edición), México D. F., México: Thomson.

Bibliografía Complementaria

- GONZÁLEZ, V. M. (1997). *Cálculo 4000 Problemas con respuestas.* México D. F., México: Editorial Progreso.
- SPIVAK, M. (1998). *Calculus. Cálculo infinitesimal.* México D. F., México: Editorial Reverté.
- WANER, S. y COSTENOBLE S. R. (2002). *Cálculo Aplicado*. (Segunda Edición). México D. F., México: Math Learning.
- STEWART, J. (1998). *Cálculo*. México D. F., México: Internacional Thomson Editores.
- FUENLABRADA, I. (2001). *Cálculo Diferencial*. (Segunda Edición). México D. F., México: Mc Graw Hill.

- EDWARDS C. H. Jr. y PENNEY D. Z. (1997). *Cálculo Diferencial e Integral*. (Cuarta Edición), México D. F., México: Pearson Educación.
- PURCELL, E. y VARVEG, D. (1992). *Cálculo Diferencial e Integral.* (Sexta Edición), México D.F., México: Prentice Hall Iberoamericana.
- ROMO, G. A. (1980). *La derivada y sus aplicaciones, 2*. México D. F., México: Limusa.
- GRANVILLE, W. A (2007). *Cálculo diferencial e integral.* México D.F., México: Noriega Limusa.
- JARAUTA, E. (2000). *Análisis matemático de una variable: fundamentos y aplicaciones*. Barcelona, España: Ediciones UPC.
- TOMEO, V. (2005). *Problemas resueltos de cálculo en una variable*. Madrid, España: Thomson.
- BATSCHELET, E. (1998). *Matemáticas básicas para biocientíficos.* Madrid, España: Dossat.

Recursos Web

- http://euler.us.es/~renato/clases
- http://www.decarcaixent.com/actividades/mates
- http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas
- http://www.difusion.com.mx/bivepuebla